

О скрытой природе спина

А.В. Каминский

(получена 13 февраля 2005; исправлена 15 марта 2005; опубликована 18 марта 2005)

В рамках развиваемой автором теории скрытого пространства-времени [1] изучается феномен спина. На основе анализа геометрических структур, порождаемых расслоением Хопфа над сферой Блоха, делается вывод о возможности интерпретации феномена спина, как пространственного движения частицы в скрытом времени.

Введение

Статья состоит из двух частей. В первой части, не претендуя на полноту изложения, мы рассматриваем современные взгляды и формальный аппарат, применяемый для описания спинового момента. Наряду с некоторыми сведениями из хрестоматийной теории спина Паули и Дирака, мы собрали вместе и анализируем более поздние представления и математические конструкции, которые могут быть полезны для проникновения в физическую сущность феномена спина. Во второй, последней части статьи, обсуждается возможность интерпретации, рассмотренных формальных конструкций, с точки зрения развиваемой автором теории скрытых переменных, основанной на принципе физической неполноты мира.

Геометрия спина

Опыт показывает, что электрон имеет внутренний момент количества движения s , который проявляется дискретно, как 2 значения проекций на выбранное направление. $+h/2$ и $-h/2$. Этот момент называется спином. Говоря о моменте, как "внутреннем" имеют в виду хорошо известный факт невозможности описания спина классическим движением в физическом пространстве-времени [2].

В квантовой механике (КМ) вводится векторный оператор спина $\hat{s}=(\hat{s}_x,\hat{s}_y,\hat{s}_z)$. Уравнения на собственные значения:

$$\begin{aligned}\hat{s}_z|\uparrow\rangle &= +h/2|\uparrow\rangle \\ \hat{s}_z|\downarrow\rangle &= -h/2|\downarrow\rangle\end{aligned}$$

Вектора $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ являются собственными векторами оператора \hat{s}_z в его собственном представлении а величины $+h/2$ и $-h/2$ – собственными значениями этого оператора. Учитывая, что $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а те же вектора в комплексно-сопряженном пространстве $\langle\uparrow| = (1, 0)$ и $\langle\downarrow| = (0, 1)$, найдем матричные элементы оператора \hat{s}_z .

$$\begin{aligned}\langle\uparrow|\hat{s}_z|\uparrow\rangle &= +h/2 \\ \langle\uparrow|\hat{s}_z|\downarrow\rangle &= 0 \\ \langle\downarrow|\hat{s}_z|\uparrow\rangle &= 0 \\ \langle\downarrow|\hat{s}_z|\downarrow\rangle &= -h/2\end{aligned}$$

$$\hat{s}_x = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_t = \hbar/2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (1)$$

Эти матрицы впервые ввел Паули и они носят его имя. Две другие матрицы \hat{s}_x и \hat{s}_y получают из коммутационных соотношений $[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar\hat{s}_z$, $[\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\hbar\hat{s}_x$, $[\hat{s}_x, \hat{s}_z] = i\hbar\hat{s}_y$, которые справедливы не только для орбитального момента, но и для спина. Матрицу \hat{s}_0 - добавляют искусственно с целью замкнуть алгебру получившихся величин. Смысл этого станет понятен из дальнейшего. Матрицы Паули позволяют очень удобно записать гамильтониан для спина в магнитном поле $H_{ij} = E_0 d_{ij} - m(\mathbf{s}_k B_k)$ и представить в более элегантной и удобной форме многие другие формулы.

В представлении произвольного направления, заданного полярными координатами (θ, φ) , оператор спина равен $\hat{s} = x_i s_i$ где

$$x_1 = \sin\theta \cos\varphi$$

$$x_2 = \sin\theta \sin\varphi$$

$$x_3 = \cos\theta$$

$$\text{так, что } \hat{s} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Можно найти собственные векторы этого оператора

$$|\rightarrow\rangle = v|\uparrow\rangle + w|\downarrow\rangle = \cos(q/2)e^{-ij/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(q/2)e^{-ij/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (3)$$

$$|\leftarrow\rangle = v_1|\uparrow\rangle + w_1|\downarrow\rangle = \sin(q/2)e^{-ij/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(q/2)e^{-ij/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Найдем средние значения наблюдаемых (1) спина в состоянии (3):

$$x_1 = \langle \hat{s}_x \rangle = v^* w + v w^*$$

$$x_2 = \langle \hat{s}_y \rangle = -i(v^* w - v w^*) \quad (5)$$

$$x_3 = \langle \hat{s}_z \rangle = |v|^2 - |w|^2$$

Предполагается, что полная вероятность нормирована на 1, то есть:

$$|v|^2 + |w|^2 = 1. \quad (6)$$

Поэтому:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (7)$$

Соотношение (7), выражающее закон сохранения вероятности, является уравнением единичной сферы $S^2 \subseteq R^3$. Точка на этой сфере имеет координаты (5).

Такую сферу называют сферой Блоха. Перепишем соотношения (5), записав комплексные числа v и w явно:

$$\begin{aligned} v &= X_4 + iX_1 \\ w &= X_2 + iX_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Величины X_1, X_2, X_3, X_4 пока, что оставим без физической интерпретации.

Получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(X_2X_4 + X_1X_3) \\ x_2 &= 2(X_3X_4 - X_1X_2) \\ x_3 &= (X_1^2 + X_4^2) - (X_2^2 + X_3^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Пространство спина (q-бита) представляет собой сферу S^3 вложенную в пространство R^4 .

Действительно, условие нормировки (6) дает:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1 \quad (10)$$

Сфера S^3 изоморфна группе Ли единичных кватернионов и может быть отождествлена со специальной унитарной группой $SU(2)$. Формулы (9) представляют собой известное преобразование Хопфа [3] $h: S^3 \rightarrow S^2$, суръективно проектирующее сферу $S^3 \subseteq (R^4 \text{ или } C^2)$, заданную уравнением (10), смысл которой нам еще предстоит выяснить, на сферу $S^2 \subseteq R^3$, заданную уравнением (7). Таким образом, между этими физико-теоретическими объектами имеется очевидная математическая связь. Сущность этой связи выражается в структуре расслоения (fiber bundle) Хопфа над сферой Блоха. Известно, что в данном случае расслоение нетривиально, то есть $S^3 \neq S^2 \times S^1$. Обратное преобразование Хопфа каждой точке P на сфере Блоха ставит в соответствие 2 окружности S^1 (слои) на сфере (10). Множества этих окружностей образует два семейства A и B . Любая окружность семейства A пересекается в двух точках с любой окружностью семейства B . Две окружности одного семейства не пересекаются, но зацеплены между собой.

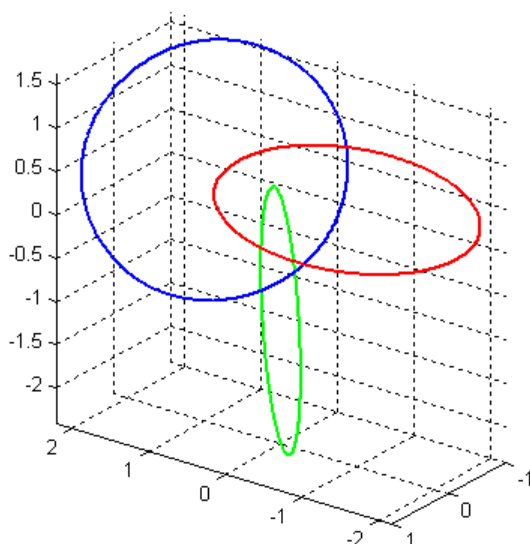
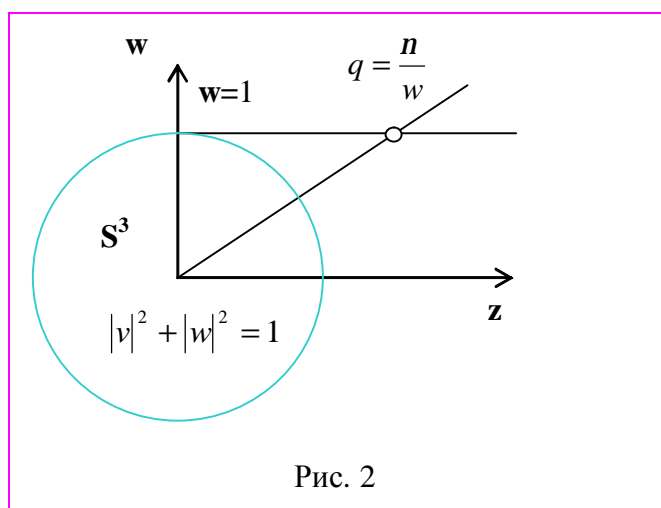


Рис. 1

На рисунке 1 показаны 3 окружности одного семейства, сцепленные каждая с каждой. Эти окружности являются слоями Хопфа над тремя различными точками на сфере S^2 . Рисунок получен методом стереографического проецирования сферы S^2 на R^3 (программа написанная в Matlab приведена в приложении). Структуру расслоения Хопфа проще всего понять, если R^4 представить как двумерное комплексное пространство $C^2(v,w)$. Тогда сфера $S^3 \subseteq C^2$ задается выражением (6). Рассмотрим одномерное комплексное проективное пространство. Для этого введем однородные координаты: $q = \frac{v}{w}$. Класс пропорциональных пар (z,w) образует точку q одномерного комплексного проективного пространства. Смотрите рисунок:



Многообразие $w=1$ является всей комплексной плоскостью с присоединенной бесконечностью. То есть ни чем иным как сферой Римана C^* . Сфера Римана (или, что то же самое R^2) может быть обратной стереографической проекцией преобразована в сферу S^2 . Всякая прямая в C^2 пересекает S^3 по большой окружности, называемой окружностью Хопфа. Итак мы рассматриваем сферу Блоха, как базу расслоения Хопфа. Любому среднему значению спина $\langle \psi | \hat{s} | \psi \rangle$, изображающемуся точкой на сфере Блоха $S^2 \subseteq R^3$ соответствует слой - некая замкнутая "трактория" в физическом многообразии $S^3 \subseteq R^4$. Сделав все необходимые математические пояснения, мы можем вернуться к обсуждению физического механизма спина.

Повороты и преобразование Лоренца

Вращение трехмерного пространства обычно описывается действительными матрицами третьего порядка, зависящими от трех параметров, например – углов Эйлера. Эти матрицы образуют группу $SO(3)$. Частный случай вращения вокруг оси Z на угол θ описывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 \\ \sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Известно, что вращение в R^3 можно описать и при помощи комплексных 2×2 матриц или, что то же самое при помощи кватернионов, образующих группу $SU(2)$ дважды накрывающую $SO(3)$. Воспользуемся кватернионным представлением с базой Паули [4].

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_t = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (12)$$

со следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned} s_x^2 &= s_y^2 = s_z^2 = -is_t = I \\ s_x s_y &= is_z, \quad s_y s_z = is_x, \quad s_z s_x = is_y, \\ s_y s_x &= -is_z, \quad s_z s_y = -is_x, \quad s_x s_z = -is_y \end{aligned} \quad (13)$$

Если $r = t \cdot s_t + x \cdot s_x + y \cdot s_y + z \cdot s_z$ кватернион с комплексными коэффициентами (бикватернион), то выражение¹

$$p' = r p r^+ \quad (14)$$

генерирует комбинацию произвольных поворотов в 4-х пространстве, калибровочных и конформных преобразований. Наложение условия $\det(r)=1$ выделяет группу Лоренца, содержащую только повороты и преобразование скорости. В частном случае, когда p – чистый кватернион, коэффициенты при мнимых единицах которого отождествляются с координатами точки на S^2 в пространстве R^3 , а так же векторная часть r – действительная ($\det(a)=i$), то выражение (14) описывает поворот трехмерного пространства вокруг оси, задаваемой вектором $\{x s_x, y s_y, z s_z\}$ на угол $j = 2 \arccos(t)$ или $j = 2 \arcsin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Конечно, r можно понимать и как соответствующую унитарную² матрицу. Важно, что, если p – чистый, то p' при преобразовании (14) обязательно переходит в чистый кватернион. Нам будет полезно экспоненциальное представление операторов вращения [5]. Например, кватернион - оператор вращения вокруг оси Z:

$$r_z = \exp(aq/2) = \exp(is_z q/2) = I \cos q/2 + is_z \sin q/2 \quad (15)$$

где "a" некоторый векторный единичный ($|a|=1$) кватернион, указывающий ось вращения. Здесь θ – действительный угол, поэтому показатель экспоненты – мнимый. В общем случае:

¹ Значок "+" обозначает эрмитовое сопряжение, которое как легко показать получается комплексным сопряжением коэффициентов.

² для унитарной матрицы совпадают ее сопряженная и обратная матрицы.

- Если "а" мнимый, то r описывает ортогональный поворот в R^3
- Если а – комплексный, то мы имеем наиболее общую форму преобразования Лоренца, включающую повороты в R^3 пространстве.
- Если показатель экспоненты действительный, то имеем обычное преобразование Лоренца без поворотов, описывающее переход из одной инерциальной системы в другую.

$$L = \exp(aq / 2) = \cosh(q / 2) + a \cdot \sinh(q / 2) \quad (16)$$

Вектор "а" здесь определяет направление скорости. Преобразование $r' = LrL^+$ оставляет инвариантным детерминант кватерниона с действительными коэффициентами: $\det(r') = \det(r)$. Но $\det(r) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ есть ни что иное как интервал – расстояние в событийном пространстве Минковского. Таким образом, L – является преобразованием Лоренца.

Явный вид Лоренцевского кватерниона $L = \exp(s_j j / 2)$ где $j = \tanh^{-1} b$ или $L = \frac{1}{\sqrt{2}} [I\sqrt{g+1} \pm s_3\sqrt{g-1}]$; где $g = 1/\sqrt{1-b^2}$ Знак "+" для движения в положительном направлении оси Z и "-" в противоположном.

Спиноры Картана и расслоение Хопфа

1. Кватернионное представление расслоения Хопфа

Теперь покажем, что преобразование Хопфа так же можно представить в терминологии кватернионов. Кватернион $r = X_1 \cdot s_t + X_2 \cdot s_x + X_3 \cdot s_y + X_4 \cdot s_z$ (Здесь мы рассматриваем действительные кватернионы) в выражении (14) заменим матрицей:

$$r = \begin{bmatrix} X_4 + iX_1 & X_2 - iX_3 \\ X_2 + iX_3 & -X_4 + iX_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & w^* \\ w & -v^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

Кватернион $p = s_x$ пусть будет матрицей-константой :

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

В результате получим:

$$p' = r^{-1} p r = \begin{bmatrix} v & w^* \\ w & -v^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^* & w^* \\ w & -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wv + w^*v^* & -v^2 + (w^*)^2 \\ w^2 + (v^*)^2 & -wv - w^*v^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

Далее сделаем подстановку (8) и перейдем обратно к кватернионному представлению. В результате с точностью до перестановок координат снова получим преобразование Хопфа:

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_1^2 + X_2^2) - (X_3^2 + X_4^2) \\ x_2 &= 2(X_1X_4 + X_2X_3) \\ x_3 &= 2(X_2X_4 - X_1X_3) \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, выражение $p' = r^{-1} s_x r$ является кватернионным эквивалентом преобразования Хопфа, так как оно преобразует точку на S^3 , заданную кватернионом r в точку на S^2 , заданную кватернионом p' . Сфера S^3 задает множество единичных кватернионов $|v|^2 + |w|^2 = 1$ или, что тоже самое, множество унитарных матриц g .

2. Связь расслоения Хопфа со спинорами

Имеет место замечательная связь расслоения Хопфа со спинорами Картана [6]. Понятие спинора возникает из понимания того несколько неожиданного, но формально очевидного факта, что векторы нулевой длины в комплексном пространстве могут образовывать конечные многообразия. Так, например, сфера нулевого радиуса будет иметь конечную поверхность. Такие многообразия можно задать параметрически:

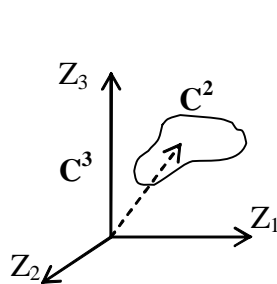


рис. 3а

$$\begin{cases} z_1 = v^2 - w^2 \\ z_2 = i(v^2 + w^2) \\ z_3 = -2vw. \end{cases}$$

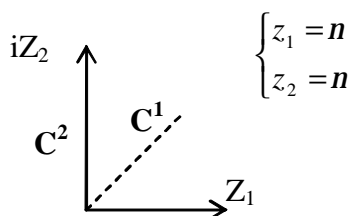


рис. 3б

$$\begin{cases} z_1 = n \\ z_2 = n \end{cases}$$

Здесь в пространстве C^2 (рис 3б) множество нулевых векторов образует прямую. На рис. 3а Множество изотропных векторов в C^3 образует двумерную поверхность. Отображение Картана задается следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= v^2 - w^2 \\ z_2 &= i(v^2 + w^2) \\ z_3 &= -2vw. \end{aligned} \quad (21)$$

Эта параметрически (параметры v, w) заданная поверхность обладает тем свойством, что координаты ее точек лежат на сфере нулевого радиуса $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Формально спинором (по Картану) называется комплексный вектор $\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$ в C^2 , отображающийся на нулевой (изотропный) вектор $Z = (z_1, z_2, z_3)$ в C^3 . Для каждого вектора $Z = (z_1, z_2, z_3)$ в C^3 существуют 2 вектора (спинора) в C^2 (v, w) и $(-v, -w)$. Из (21) следует:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} z_1 + iz_2 & -z_3 \\ -z_3 & -z_1 + iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^2 & vw \\ vw & v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & v \end{bmatrix} \quad (22)$$

Квадрат спинора равен четырех-вектору (матрица – кватернион слева). Иногда спинор, как особую величину отличную от тензоров, определяют используя именно эту особенность. В связи с этим часто спинор образно называют корнем квадратным из четырех-вектора. В отличие от вектора, преобразующегося как $p' = WpW^*$, где W -кватернион, спинор преобразуется следующим образом: $S' = WS$. Спиноры были обнаружены ещё в 1913 Э. Картаном [7] в его исследованиях по теории представлений групп а позже в 1929 переоткрыты Б. Л. Варденом [8] в связи с исследованиями по квантовой механике. Он и назвал эти величины спинорами. Спиноры оказались полезны в физике так как подходили для формального описания поведения векторных частиц. Физическую сущность спиноров проясняет их связь с расслоением Хопфа.

Подставим $v = X_1 + iX_2$ и $w = X_3 + iX_4$ в (21) и выделяя действительную и мнимую части, получим :

$$\begin{aligned} x_1 = \operatorname{Re} z_1 &= (X_1^2 + X_4^2) - (X_2^2 + X_3^2) & x_1' = \operatorname{Im} z_1 &= 2(X_1X_2 + X_3X_4) \\ x_2 = \operatorname{Re} z_2 &= -2(X_1X_2 + X_3X_4) & x_2' = \operatorname{Im} z_2 &= (X_1^2 + X_3^2) - (X_2^2 + X_4^2) \\ x_3 = \operatorname{Re} z_3 &= 2(X_1X_3 - X_2X_4) & x_3' = \operatorname{Im} z_3 &= 2(X_1X_4 - X_2X_3) \end{aligned} \quad (23)$$

Это есть ни что иное, как уже знакомое нам преобразование Хопфа. Таким образом, мнимая и действительная части изотропного вектора Z составляют два ортогональных вектора Хопфа $H_1 = (x_1, x_2, x_3)$ и $H_2 = (x_1', x_2', x_3')$. Эти 2 вектора однозначно определяют спинор Картана $U = (v, w)$. Можно дополнить эту структуру третьим вектором H_3 , ортогональным первым двум. Комбинируя эти три вектора по два в комплексные пары, получим шесть спиноров.

Легко видеть, что поворот в плоскости (v, w) на угол α приводит к повороту вектора Z на 2α в плоскости (z_1, z_2) . Это отражает хорошо известный экспериментальный факт неголономности поворота спина. Этот удивительный факт легко проверяем в интерференционных экспериментах.

Напомним, что проекцией Хопфа называют проекцию четырехкомпонентного вектора на трехкомпонентный вектор (Хопфа), такую, что квадрат суммы квадратов компонент четырехкомпонентного вектора равен сумме квадратов трехкомпонентного. Если трехкомпонентный вектор Хопфа представить как $H = (x/ct, y/ct, z/ct)$, то тогда проекцию Хопфа можно рассматривать как стереографическую проекцию 4-вектора (x, y, z, ct) на проективное пространство R^3 . 4-вектору соответствует кватернион в матричном представлении: $X = x^i s_i$

Заметим, что $\det X = x_0^2 - |\mathbf{x}|^2$

Таким образом, проекция Хопфа в нашем случае является проекцией точек на световом конусе на сферу Блоха. Это дает нам право интерпретировать составляющие спинора (v, w) как комплексные комбинации координат точек светового конуса. $(v, w) = (x_i + ix_j, x_k + ix_l)$

где $i, j, k, l = (0, 1, 2, 3)$. Таким образом, спинорное поле представимо траекторией на световом конусе. Она проектируется на единственную точку на сфере Блоха, соответствующую определенному направлению спина.

Уравнение Дирака [9]

Необходимость рассматривать повороты не только в \mathbb{R}^3 , но и в \mathbb{R}^4 , связанная с требованием релятивистской инвариантности, привела Дирака к необходимости введения 4-х рядных матриц g^i , которые теперь носят его имя³:

$$g^i = \begin{bmatrix} 0 & -s_i \\ s_i & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1,2,3; \quad g^0 = \begin{bmatrix} -is_0 & 0 \\ 0 & is_0 \end{bmatrix}; \quad (24)$$

Здесь для удобства мы используем вместо обозначений s_t, s_x, s_y, s_z нумерацию s_0, s_1, s_2, s_3

Эти кватернионные матрицы образуют алгебру Клиффорда.

В компактной форме уравнение Дирака имеет вид:

$$(ig^i \partial_i - m_0)\psi(x) = 0 \quad (25)$$

(считаем $c=1; \hbar=1$). ∂_i - обычный четырех-градиент. Так как ψ здесь 2×2 кватернионная матрица, то ψ - кватернионный 2-х вектор.

Заменяя $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_i$ и перенося m направо, получим:

$$\left(g^0 \frac{\partial}{\partial t} + g^i \nabla_i \right) \psi(x) = im_0 \psi(x) \quad (26)$$

Раскроем это выражение, используя явное значение матриц (24). ВФ $\psi(x)$ разобьем на две двухкомпонентных.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -is_0 & 0 \\ 0 & is_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{pmatrix} 0 & -s_i \\ -s_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = im_0 \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Здесь $j_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ и $j_2 = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ - обычные спиноры. Величину $y = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}$ называют биспинором. Как мы уже говорили, вектор ψ - двухкомпонентный кватернионный вектор. Это очевидно из структуры уравнения (27) где фигурируют кватернионные матрицы, которые умножаются соответственно на кватернионные вектора.

Перемножая, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -is_0 j_1 \\ is_0 j_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{pmatrix} -s_i j_2 \\ s_i j_1 \end{pmatrix} = im_0 \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Распишем уравнение (34) для каждой из компонент биспинора :

³ Не путать мнимую единицу с индексами, обозначаемыми той же буквой.

$$\begin{aligned} -is_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_1 - s_i \nabla \mathbf{j}_2 &= im_0 \mathbf{j}_1 \\ + is_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_2 + s_i \nabla \mathbf{j}_1 &= im_0 \mathbf{j}_2 \end{aligned} \quad (29)$$

Это система уравнений для кватернионов ϕ_1 и ϕ_2 . Суммирование по индексам i здесь подразумевается. Мы не будем расписывать эти уравнения в волновых комплексных компонентах, поскольку смысл который мы хотим донести до читателя содержится в алгебраических структурах, построенных над комплексным полем, каковыми являются кватернионы или спиноры. Прежде выясним физический смысл двух уравнений и соответственно двух неизвестных ϕ_1 и ϕ_2 .

Будем искать решения не зависящие от координат. Легко видеть, что спиноры-кватернионы ϕ_1 и ϕ_2 соответствуют положительным и отрицательным энергиям частицы. Действительно, умножив на i , получим :

$$\begin{aligned} s_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_1 &= -m_0 \mathbf{j}_1 \\ s_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_2 &= m_0 \mathbf{j}_2 \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая, что $i \frac{\partial}{\partial t}$ это оператор энергии, который в своем собственном представлении в случае покоя равен просто массе $+m$ для $E>0$ и $-m$ для $E<0$, получим соответствие:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &\leftrightarrow E < 0 \\ \mathbf{j}_2 &\leftrightarrow E > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (36) это обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Решение которых имеет вид:

$$\mathbf{j}_1 = r_1 \exp(-s_0 m_0 t) \quad \text{и} \quad \mathbf{j}_2 = r_2 \exp(s_0 m_0 t) \quad (32)$$

Мы видим, что для покоящейся свободной частицы имеет место некое периодическое "движение" в 4-х пространстве. Это "движение" подобно "движению" покоящейся частицы, описывающееся ВФ $\psi = \psi_0 \exp(im_0 t)$. По понятным причинам слово "движение" мы заключили в кавычки. Обычно в этом случае говорят о колебаниях поля.

Уравнение Дирака можно записать для одного кватернионного поля. Кватернионное поле мы будем обозначать прямой буквой Ψ в отличие от наклонной ψ , которую зарезервируем для Дираковских полей. Систему уравнений (29) представим в виде уравнения для одного комплексного кватернионного поля [10].

$$\nabla \Psi = im_0 (\overline{\Psi})^* s_3 \quad (33)$$

Оператор набла здесь – кватернион: $\nabla = I \frac{\partial}{\partial t} + s_i \nabla_i$

Чертой сверху обозначено векторное сопряжение меняющее знак векторной части кватерниона $\bar{q} = q_0 I - q_i s_i$; Звездочкой обозначено комплексное сопряжение

$q^* = q_0^* I + q_i^* s_i$. Матричный эквивалент этих операций:

$$\Psi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}; \quad \Psi^* = \Psi^+ = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}; \quad (\bar{\Psi})^+ = \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \quad (34)$$

Как видно, комплексное сопряжение кватерниона эквивалентно эрмитовому сопряжению.

Можно показать, что имеет место следующее соответствие кватернионного поля с полем Дирака:

$$\Psi = \begin{bmatrix} y_1 + y_3 & y_2^* - y_4^* \\ y_2 + y_4 & -y_1^* + y_3^* \end{bmatrix} \quad (35)$$

Действительно, запишем уравнение (33) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 + y_3 & y_2^* - y_4^* \\ y_2 + y_4 & -y_1^* + y_3^* \end{bmatrix} = im_0 \begin{bmatrix} -y_1 + y_3 & +y_2 - y_4 \\ -y_2^* - y_4^* & -y_1^* - y_3^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

Те, кто пожелает могут проверить, что это уравнение действительно эквивалентно уравнению Дирака (25). Таким образом, кватернион ψ можно сконструировать из биспинора, полученного решением обычного уравнения в матричной форме.

Решением (33) являются 2 кватерниона, параметризованные пространственно-временными координатами и лежащие на многообразии светового конуса. В общем случае они имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{E>0} &= r_1 \exp(is_z(+Et - p_i x^i)) \\ \Psi_{E<0} &= r_2 \exp(is_z(-Et - p_i x^i)) \end{aligned} \quad (37)$$

Где r_1 и r_2 – кватернионы не зависящие от координат и времени и соответствующие положительной и отрицательной энергии. В классической интерпретации эти выражения для ψ являются плоскими кватернионными волнами. Рассмотрим простейший случай покоящейся частицы со спином $S_z = +\hbar/2$

Решение для этого случая: $\Psi = A \cdot I \cdot \exp(is_3 Et)$. A – действительная нормировочная постоянная. Воспользовавшись (17), (21), легко убедиться, что удовлетворяется $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Это подтверждает, что величина ψ является спинором. Из (9) получим $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = -A^2$ Таким образом, спинор ψ описывает частицу со спином направленным вдоль положительного направления

оси Z . Сдвигая фазу на $\pi/2$; $\Psi \exp(ip/2) = i\Psi$, замечаем, что теперь $x_3 = +A^2$ то есть спин поменял направление на противоположное. Очевидно, что для того чтобы фаза ψ изменилась на 2π спин должен повернуться на 4π . Вспомнив, что кватернион $r_z = \exp(is_3 q/2)$ описывает поворот вокруг оси Z на угол θ , становится ясно, что наш спинор $\Psi = A \cdot I \cdot \exp(is_3 Et)$ описывает вращение пространства R^3 вокруг оси Z с частотой $2E/h$.

Спин как вращение в скрытом времени

Концепция скрытого времени развивалась нами в работах [1],[11],[12],[13]. По сходному пути шли авторы работ [14],[15]. Основной концепции скрытых параметров с нашей точки зрения может служить представление о мире, как конечной замкнутой системе. В этом предположении, которое следует рассматривать как аксиому, естественным образом возникают нелокальные скрытые переменные, что в конечном счете приводит к несепарабельности и неполноте мира, являющихся причиной квантовых явлений.

Представьте себе некоторое абстрактное пространство World векторов, изображающих состояния мира. Мы можем факторизовать это пространство $World = Subj \otimes Obj$ Где $Subj$ и Obj подпространства субъекта и объекта соответственно. Пусть вектор состояния мира подчиняется некоторому объективному закону движения. Разложим этот вектор на сумму двух векторов – вектор состояния субъекта и вектор состояния объекта. Получим систему из трех линейно независимых векторов. Зависимость обусловлена взаимно согласованным движением субъекта и объекта, дающим истинную динамику мира. Эти рассуждения справедливы только для гипотетического внешнего наблюдателя. С точки зрения субъекта все выглядит иначе. Неспособность субъекта получить знание о собственном векторе⁴, а значит и о векторе состояния самого мира, приводит к тому, что он не может явно наблюдать и связь между своим состоянием и состоянием объекта. Это принципиальное ограничение обусловлено тем, что субъект не может включить в описание самого себя. Из логики известно, что принятие к рассмотрению подобных унарных отношений приводит к логическим катастрофам. На эту ситуацию совершенно справедливо указывают авторы работы [16]. Таким образом, предположение о конечности мира с одной стороны приводит к несепарабельности мира, а с другой к его субъективной неполноте. То есть к невозможности получать достоверное знание об объекте исследования. Изложенное обосновывает концепцию субъективной неполноты физической реальности. Согласно этой концепции, субъект ограничен в точности измерений и предсказаний будущего не потому, что природа на фундаментальном уровне хаотична, а потому, что имеют место указанные выше ограничения для самого субъекта. Объективно, динамика мира может быть детерминирована, но для субъекта этот уровень реальности оказывается скрыт. Существование скрытой объективной реальности математически можно выразить структурами расслоения над физической реальностью. В этой модели каждой точке физического пространства-времени сопоставляется слой скрытых переменных. Так, в частности, возникает представление о скрытом времени. Каждый нулевой момент физического времени при этом имеет объективную длительность. Этот

⁴ Ведь это предполагает и знание о собственном знании!

промежуток времени, скрытый от наблюдателя, позволяет "договориться" частицам, входящим в ЭПР пару о взаимной скоррелированности а так же в самом прямом смысле позволяет электрону пройти через обе дырки одновременно [15] (с т.з. наблюдателя) в знаменитом опыте по интерференции электронов. Ниже мы покажем, что скрытое время может быть полезно для объяснения природы спина.

Рассмотрим простейший случай одномерного движения скалярной частицы. Скрытое движение можно описать, введя как минимум одну дополнительную времениподобную координату. Как мы уже обсуждали в [1] для скалярных частиц имеет место тривиальное расслоение по фазе ВФ. Так, что решение уравнения движения в объективном пространстве имеет вид :

$$y = y_0 \exp\left(i \frac{s}{\hbar}\right) \quad (38)$$

где $y_0 = A \exp(i\omega t - ikx)$, s – действие для свободной частицы.

$$y = y_0 \exp\left(i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t_h\right) \quad (39)$$

t_h – скрытая времениподобная координата. Напомним, что мы заменяем поле движением частицы в скрытом времени [1]. В этом понимании формула (39) описывает движение частицы по двумерной поверхности тора T^2 . Период обращения по малому кругу составляет $T^h = 1/\omega_{obj} = \hbar/m_0 c^2$. Если скорость частицы $v \rightarrow 0$, то будем считать, что $k \rightarrow 2\pi/L$. Где L – длина большого круга тора. Для свободной частицы L равно размеру вселенной. Если L конечно, то мы имеем ограничение на нижний предел скорости или на физический нуль скорости!).

Траектории частиц, движущихся в скрытом времени, составляют особый класс кривых на поверхности тора, которые называются окружностями Вилларсо [17], названных в честь французского математика, впервые исследовавшего их в 1848 году. По сути они являются геодезическими на торе. Замечательно то, что расслоение Хопфа над сферой Блоха как раз и дает множество окружностей Вилларсо всюду плотно заполняющее R^3 !. На рисунке ниже показан тор. Красные линии - круги Вилларсо.

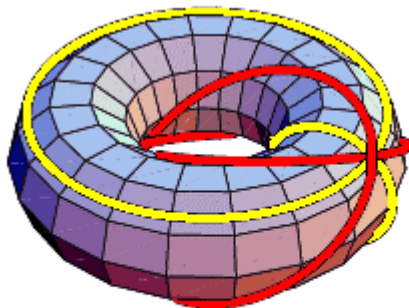


Рис. 4

Физический референт существования двух семейств гомотопически⁵ не эквивалентных траекторий, обусловленных нетривиальностью расслоения нам не известен.

Для векторных частиц геометрия расслоения сложнее.

Решением уравнения Дирака в общем случае является некоторый кватернион с зависящими от времени компонентами. Быстроосциллирующий фазовый множитель $\exp(im_0c^2t/h)$ не влияющий на физику процессов может быть отброшен. Однако, выбрасывать этот общий множитель не следует. Решением уравнения (33) для частицы движущейся в положительном направлении оси Z со спином, направленным в по движению будет плоская кватернионная волна:

$$\Psi = A \left(I + \frac{p_z S_3}{E + m_0} \right) \exp(is_3(Et - p_z z)) \quad (40)$$

Это решение может быть легко получено из решения для покоящейся частицы применением преобразования Лоренца. A - нормировочная постоянная. Сохраняя общий фазовый множитель, получим:

$$\Psi = \Psi_0(p) \cdot \exp\left(is_3 \frac{m_0 c^2}{h} t^h\right) \quad (41)$$

Здесь через ψ_0 мы обозначили тот же кватернион ψ , но со смещенным на m_0c^2 уровнем отсчета энергии. Время t мы заменили новым времениподобным параметром t^h , в соответствии с нашим предположением о том, что временные интервалы $t \leq m_0c^2/h$ лишены физического содержания. Новый параметр t^h мы называем скрытым (hide) временем. Сомнения в корректности такой замены могут быть рассеяны тем, что она никак не влияет на физику. Поэтому указанные соображения могут не приниматься во внимание, а введение скрытого времени рассматриваться просто как введение нового элемента теории. Фазовый множитель в данном случае играет роль однопараметрического преобразования Клиффорда $C_j : S^3 \rightarrow S^3$, перемещающего точки на сфере S^3 вдоль больших окружностей. Кватернион (41) параметризованный скрытым временем генерирует траекторию на световом конусе.

Итак каждой точке на сфере Блоха (или каждому направлению спина в пространстве) в каждый момент времени t соответствует слой, являющийся прообразом Хопфа на световом конусе. Этот слой является траекторией частицы в скрытом времени. Именно это скрытое движение ответственно за внутренний момент элементарных частиц.

⁵ Гомотопически эквивалентные многообразия переходят друг в друга путем непрерывных деформаций.

Приложение

Визуализация скрытого движения электрона

Рассмотрим какое движение в скрытом времени совершает электрон, движущийся в физическом пространстве-времени в направлении, заданном полярными координатами (θ, φ) со спином, направленным по оси x . Точка S^3 с координатами $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ задается кватернионом⁶

$$r = X_1 \cdot s_t + X_2 \cdot s_x + X_3 \cdot s_y + X_4 \cdot s_z \quad (41)$$

Осуществив мнимое преобразование $t \rightarrow it$ сфере S^3 можно рассматривать как световой конус. Точка на сфере Блоха S^2 с координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$ задается чистым кватернионом:

$$p' = x_1 \cdot s_x + x_2 \cdot s_y + x_3 \cdot s_z \quad (42)$$

Преобразование Хопфа дается выражением:

$$p' = r^{-1} p r \quad (43)$$

где r - чистый кватернион, выбор которого определяет вид расслоения. Для простоты без потери общности здесь мы выбираем $r = s_x$. Задав точку на сфере S^2 получим соответствующий слой - окружность на сфере S^3

$$h^{-1}(p') = \{r \cdot \exp(is_1 t^h)\}_{0 \leq t^h \leq 2\pi} \quad (44)$$

Для простоты $m_0 c^2 / h$ считаем равным 1. Выбор is_1 в показателе экспоненты произволен и так же определяет представление расслоения. Задача нахождения слоя Хопфа по точке на сфере S^2 имеет два решения [5]:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_1)}} ((1+x_1)s_x + x_2s_y + x_3s_z) \quad (45)$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_1)}} ((1+x_1)s_t - x_3s_y + x_2s_z) \quad (46)$$

Слой $r' = r \exp(is_1 t^h)$ над $S^2 \quad \{x_1, x_2, x_3\}$, получаемый однопараметрическим преобразованием также отображается на единственную точку $\{x_1, x_2, x_3\}$. Слой является большой окружностью сферы S^3 . Умножим (45) на $\exp(is_1 t^h) = I \cos t + is_1 \sin t^h$ Получим:

⁶ Координаты переставлены для того чтобы сохранить соответствие с формулами преобразования (9)

$$r_1 e^{is_1 t^h} = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_1)}} \left[s_t(1+x_1) \sin t^h + s_1(1+x_1) \cos t^h + \right. \\ \left. + s_2(x_2 \cos t^h - x_3 \sin t^h) + s_3(x_3 \cos t^h + x_2 \sin t^h) \right] \quad (47)$$

Аналогичное выражение можно получить и для (46).

$$r_1 e^{is_1 t} = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_1)}} \left[s_t(1+x_1) \cos t^h - s_1(1+x_1) \sin t^h + \right. \\ \left. + s_2(x_3 \cos t^h - x_2 \sin t^h) + s_3(x_2 \cos t^h + x_3 \sin t^h) \right] \quad (48)$$

Этими формулами мы воспользуемся для визуализации расслоения Хопфа, дающего представление о траекториях электрона в скрытом пространстве-времени. Ниже мы приводим программу для Matlab, поэкспериментировав с которой вы легко представите себе особенности геометрии расслоения Хопфа и получите некоторое представление о траекториях электрона в скрытом времени. В заключение приведем еще один рисунок сгенерированный этой программой. На этом рисунке 16 сцепленных окружностей Вилларсо образуют тороидальную поверхность:

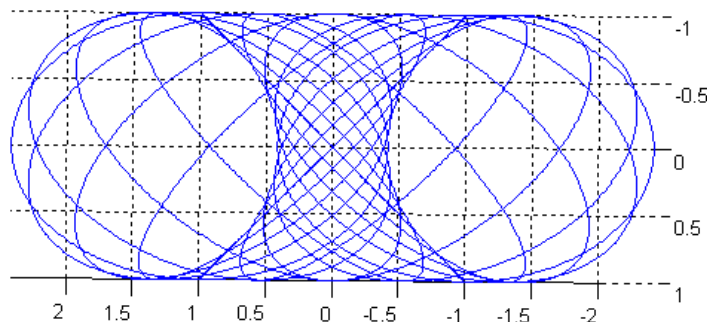


Рис. 5

Вы можете скопировать приведенную ниже программу в Command Window приложения Matlab и получите возможность рассмотреть эту поверхность со всех сторон.

Программа визуализации расслоения Хопфа

```
clf; % очистка графического экрана.
beta = [0 : 999]/1000 * 2 * pi; % траектория разбита на 1000 точек.
colorr = ['g', 'r', 'b']; % выбираем цвета
fi=pi/2; % Задаем полярные углы на сфере Блоха.
theta = [0 : 15]/16 * 2 * pi; % углы
for j = 1 : length(theta) % цикл по углам.

% вычисление координат на сфере Блоха.
nx=sin(theta(j))*cos(fi);
ny=sin(theta(j))*sin(fi);
nz=cos(theta(j));
```



```
% вычисление прообраза Хопфа.
a=1/sqrt(2*(1+nx));
X1=-a*(1+nx)*sin(beta);
X3=a*(1+nx)*cos(beta);
X4=a*(ny*cos(beta)-nz*sin(beta));
X2=a*(ny*sin(beta)+nz*cos(beta));

% Стереографическое проецирование на R3
u1=X2./(1-X1);
u2=X3./(1-X1);
u3=X4./(1-X1);

% Вывод графики.
plot3(u1, u2, u3, 'b')
axis equal; grid on;
xlabel('u1'); ylabel('u2'); zlabel('u3');
hold on;
end;
```

Благодарности

Я благодарю свою супругу Наталью за неизменную помощь и поддержку моих не приносящих дивидендов увлечений.
За интерес проявленный к работе и ценные замечания с большим удовольствием благодарю моего друга и коллегу математика Центра Высоких Технологий (Грузия, Тбилиси) Деви Девдариани.

Литература

- 1 А.В. Каминский "Скрытое пространство-время в физике", Квантовая Магия, том 2, вып. 1 , стр. 1101-1125 , 2005
2. П.А.М.Дирак "Принципы квантовой механики", Москва, 1979
3. Статья "Hopf Map" на сайте математической энциклопедии <http://www.mathworld.wolfram.com>
4. Статья "Quaternion" на сайте математической энциклопедии <http://www.mathworld.wolfram.com>
5. David W. Lyons "An Elementary Introduction to the Hopf Fibration", Mathematics magazine vol. 76, No. 2, Aprile 2003.
6. R.M. Kiehn Spinors, Minimal Surfaces, Torsion Helicity <http://www.cartan.pair.com>
7. <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/059/525.htm>
8. <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/003/249.htm>
9. А.Н. Матвеев. Атомная физика.-М.: Высш. шк., 1989.
10. Jonathan Scott. "Complex Four-vector Algebra", 32 Pennard Way, Eastleigh, HampshireSO53 4NJ, UK, August 29, 1998
11. А.В. Каминский. Моделирование физики в условиях неполноты. Квантовая Магия, том 1, вып. 3, стр. 3126-3149, 2004

12. А.В. Каминский Космология познания.
<http://piramyd.express.ru/disput/kaminski/kaminski.htm>
13. А.В. Каминский Макрофлуктуации в модели алгоритмического мира
<http://piramyd.express.ru/disput/kaminski/kaminski.htm>
14. P.V. Kurakin, G.G. Malinetsky, Toy quantum mechanics with hidden variables.
Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM) Russian Academy of Sciences
Moscow, Miusskaya sq., 4.
15. Xiaodong Chen "A New Interpretation of Quantum Theory. | Time as Hidden
Variable". Department of Physics, University of Utah, Salt Lake City, UT
84112 (March 29, 2000)
16. В.А.Намиот, Д.С.Чернавский “Непредсказуемость квантового мира и
логические катастрофы”
17. Статья "Torus" на сайте математической энциклопедии
<http://www.mathworld.wolfram.com>